Введение в геометрию небесных сфер

И. В. Маресин

27 марта 2019 г.

Аннотация

Вводная часть доклада «Голоморфные структуры в теории пространства-времени и поля», (в основном) изложенная на семинаре 7 марта 2019 г.
См. `http://course.irccity.ru/celestial/2019.html`

1 Расслоение неб.сфер лоренцева X

1.1 Собственно многообразие X

Определение. *Лоренцево пространство-время* — псевдориманово четырёхмерное многообразие с метрикой g сигнатуры $(+---)$ и заданным в каждой точке $x \in X$ направлением времени (т. е. одна из двух компонент связности конуса $\{\, v \in T_x X \mid g(v) > 0 \,\}$ выбрана как «хронологическое будущее»), причём непрерывным образом.

Минимальные требования гладкости: C^2 для X, C^1 для g.
Геодезический поток на $T\backslash\{0\}X$ определяется системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\,, \text{ где } v \in T_x X \\ \nabla\, v = 0, \text{ где } \nabla \text{ — связность Леви-Чивиты} \end{cases}$$

Для всего дальнейшего требуем от геодезического потока определять слоение (т. е. быть однозначно интегрируемым локально).

1.2 Небесные сферы и $\mathfrak{S}X$

Определение. Для каждого $x \in X$ граница его конуса «хронологического будущего» в $T_x X$ называется *световым конусом будущего* и обозначается $\mathcal{C}_x^+$.

Определение. $\mathfrak{S}_x$ — *небесная сфера* — является базой конуса $\mathcal{C}_x^+$ в $T_x X$, а её точки будут обозначаться $\mathrm{P}v$, где $v \in \mathcal{C}_x^+ \setminus \{0\}$. Объединение небесных сфер по всем точкам X образует локально тривиальное гладкое расслоение над X, обозначаемое через $\mathfrak{S}X$, с функцией проекции $\mathrm{x} : \mathfrak{S}X \to X$.

Замечание. Точки небесной сферы понимаются как светоподобные *направления* (1-подпространства) в $T_x X$, а P — как *проективизация* $v \mapsto \{\, \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{C} \,\}$.

Замечание. Ввиду определения $\mathfrak{S}X$ через касательное расслоение, конкретно $\mathfrak{S}X \subset \mathbf{P}(TX)$, о его гладкости справедливо:

$$\begin{cases} TX - \ C^k \\ \ g \in C^k \end{cases} \Rightarrow \mathfrak{S}X - \ C^k.$$

1.3 Касательные подрасслоения

Обозначение. Обозначим через $T_{\frown}\mathfrak{S}X$ объединение касательных расслоений $T\mathfrak{S}_x$ по всем $x \in X$. Равносильно: $T_{\frown}\mathfrak{S}X := \ker d\mathrm{x}$ — вертикальное подрасслоение в $T(\mathfrak{S}X)$.

Замечание. Геодезический поток на TX, после проективизации и ограничения на световые направления, превращается в FX — поле 1-подпространств в касательном расслоении $T(\mathfrak{S}X)$ тотального пространства расслоения $\mathfrak{S}X$. FX задаётся уравнениями $dx \parallel v$ (приращение по x коллинеарно v), $\nabla v = 0$, где $v \in \mathcal{C}_x^+ \setminus \{0\}$ — вектор, представляющий точку небесной сферы.

Замечание. Интегрирование потока FX даёт «световое» слоение тотального пространства $\mathfrak{S}X$, листами которого являются изотропные (светоподобные) геодезические на X, максимально продолженные в обе стороны времени и поднятые на $\mathfrak{S}X$ отображением P касательных векторов на небесные сферы. Они являются проективными образами тех листов геодезического слоения $T_{\setminus\{0\}}X$, что представляют световые направления.

Определение. 1-форма $\vartheta = (v.dx)$, где $v \in \mathcal{C}_x^+ \setminus \{0\}$ задана на тотальном пространстве $\mathfrak{S}X$.

Существует *глобальное* линейное (ранга 1) расслоение с помеченной положительной стороной, значения в котором принимает инвариантно определённая форма ϑ. Это построение приведено подробно в статье:
И. В. Маресин «Конформные системы отсчета для лоренцевых многообразий», *Теоретическая и математическая физика* 191:**2** (2017), 243–253,
`http://course.irccity.ru/spinors/article.pdf`

Обозначение. $H\,\mathfrak{S}X := \ker\vartheta \subset T(\mathfrak{S}X)$.

Замечание. Т. к. 1-форма ϑ нигде не обращается в ноль, то $H\,\mathfrak{S}X$ — коориентированное подрасслоение коразмерности 1 (распределение гиперплоскостей) в $T(\mathfrak{S}X)$. При этом $FX \subset H\,\mathfrak{S}X$ (следует из того, что всякое лоренцево изотропное направление ортогонально себе) и $T_{\frown}\mathfrak{S}X \subset H\,\mathfrak{S}X$ (следует из его уравнения $d\mathrm{x} = 0$). Иными словами, ϑ обнуляет как FX, так и $T_{\frown}\mathfrak{S}X$.

Замечание. Возможны и другие конструкции 1-формы, задающие то же коориентированное распределение гиперплоскостей, касательных к $\mathfrak{S}X$.

Об интерпретации скобок Ли и C^1 для векторных полей там, где $\mathfrak{S}X$ не C^2, см. параграф 1.5.

1.4 Комплексные структуры

Каноническая конформная структура на небесной сфере, т. е. выбор J и $T^{1,0}$ на $T(\mathfrak{S}_x)$ с точностью до ориентации, является следствием представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Spin}(1,3)$ на T_xX, являющегося тензорным произведением двух комплексно сопряжённых неприводимых представлений (спинорных):

$$(v^\alpha) \mapsto \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + i\,v^2 \\ v^1 - i\,v^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix}$$

Конкретно, представление умножает матрицу слева на $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ и справа на $A^\dagger$.

Комплексная делается из конформной фиксацией 4-мерной ориентации.

Пусть $V_1, V_2 \in C^2(\mathfrak{S}X, T_{\frown}\mathfrak{S}X)$, $\quad L \in C^1(\mathfrak{S}X, FX)$ $\quad$ (откуда видно, что $[V_1, V_2] \in C^1(\mathfrak{S}X, T_{\frown}\mathfrak{S}X)$ и $\vartheta[L, [V_1, V_2]] = 0$).

В предположении C^2-гладкости $\mathfrak{S}X$, исследуем выражение $\vartheta[[L, V_2], V_1]$, тождественно равное $d\vartheta([L, V_2], V_1)$.[1] Симметрично по $V_{1,2}$ в силу тождества Якоби.

Теорема 1. *Квадратичная форма имеет вид* $\vartheta[[L, V], V] = f(L)|V|^2$, *где* $|\cdots|$ *есть согласованный с комплексной структурой неотрицательный «модуль вектора» (со значениями в «расслоении размера»* $\mathcal{L}^+$ *небесной сферы; см. «Конформные системы отсчета для. . . », параграф «Комплексные линейные расслоения»), а* $f(\cdots)$ *— линейное отображение* FX *в действительное расслоение ранга 1 (то, чтобы выражения в левой и правой частях тождества можно было приравнять).*

Элементарное доказательство пока неизвестно.

Следствие. Если по значениям $[L, V]$ задать комплексную структуру в $H\,\mathfrak{S}X/FX$, то $d\vartheta$ окажется относительно неё формой бистепени $(1, 1)$.

1.5 Скобки при недостаточной гладкости $\mathfrak{S}X$

Для чисто небесных ($T_{\frown}\mathfrak{S}X$) векторных полей легко определить, что́ есть гладкость C^1. Небесные сферы изоморфны сферам Римана (так что всегда даже алгебраичны) и «привязаны» к TX, а по горизонтали (вдоль X) гарантировано минимум C^2.

С другой стороны, расслоение $T(\mathfrak{S}X)/T_{\frown}\mathfrak{S}X$ тоже имеет гладкость C^1, поскольку идентично $\mathrm{x}^*\,TX$ (обратному образу), а для TX гарантировано C^1.

Сечения расслоения $\mathrm{x}^*\,TX$ ценны тем, что можно вычислять действие таких «векторных полей» (в частности, скобок Ли) на функциях из $C^2(X)$ имея в виду, что $C^2(X) \hookrightarrow C^1(\mathfrak{S}X)$.

Пример. $Y := [L, V_2] : C^2(X) \to C(\mathfrak{S}X)$ — сечение расслоения $\mathrm{x}^*\,TX = T(\mathfrak{S}X)/T_{\frown}\mathfrak{S}X$. Считать надо только $-V_2 \circ L$, поскольку V_2 сразу даёт нуль на функции, зависящей только от $x \in X$.

Таким образом, билинейную форму $d\vartheta$ следует считать корректно определённой даже без предположения о C^2-гладкости расслоения небесных сфер.

[1] $d\vartheta$ может быть определено как кососимметричное билинейное отображение из $H\,\mathfrak{S}X$ в то же линейное расслоение, где принимает значения 1-форма ϑ. В $d\vartheta$ важно не столько оно само, сколько плоскости в $H\,\mathfrak{S}X/FX$ (rank = 4), им обнуляемые.

2 Переход к пяти измерениям

2.1 Факторизация по световому слоению

Поскольку $d\vartheta$ целиком обнуляет поток FX (т.е. $d\vartheta(FX,\cdot) = 0$ всюду, где определено, а именно на $H\,\mathfrak{S}X$), то $H\,\mathfrak{S}X$, как ядро 1-формы ϑ, выдерживает факторизацию вдоль светового слоения. Это мотивирует следующее

Определение. Для заданного лоренцева пространства-времени X и его расслоения небесных сфер $\mathfrak{S}X$, многообразие $\mathfrak{N}$ есть *базовое пятимерие* если задано $\text{п} : \mathfrak{S}X \twoheadrightarrow \mathfrak{N}$ такое, что $\ker d\text{п} = FX$, $H\,\mathfrak{N} := \text{п}_*\,H\,\mathfrak{S}X$ определено однозначно, и непротиворечиво задана коориентация.

Замечание. п-образ каждой световой геодезической — одна точка. Полный п-прообраз точки $\mathfrak{N}$ может, вообще говоря, оказаться объединением нескольких геодезических линий на $\mathfrak{S}X$.

Конкретика:
отображение с указанными свойствами всегда строится локально;
для глобально гиперболического X разумно положить $\mathfrak{N}$ множеством всех световых геодезических.

2.2 Геометрия многообразия $\mathfrak{N}$

Нетрудно убедиться, что прямой образ $H\,\mathfrak{S}X$ под действием проекции п задаёт коориентированную контактную структуру $T\text{c}\,\mathfrak{N} := H\,\mathfrak{N} = \text{п}_*\,H\,\mathfrak{S}X$ на $\mathfrak{N}$. Её 1-форма также будет обозначаться через ϑ.

В некоторых случаях построение базового пятимерия $\mathfrak{N}$ (или хотя бы его части) можно предъявить, зная довольно мало о пространстве-времени. Проще всего сделать пятимерие из трёхмерного многообразия путём сферизации кокасательного расслоения (что само по себе даёт коориентированную контактную структуру).

Конкретно, берётся $\mathfrak{N} := \mathbf{S}T^*M$, где «**S**» — сферизация, т. е. удаление 0 и фактор по умножению на положительные числа. Смыслом M может являться или ахрональная гиперповерхность в самом X (в частности, поверхность Коши), или трёхмерие конформной системы отсчёта для X.

Последнее особенно ценно тем, что космология Большого Взрыва допускает построение «стандартной» конформной системы отсчёта с космологической сингулярностью «начала времён» в качестве M (впрочем, её можно понимать и как предел поверхностей Коши, задаваемых космологическим временем, стремящимся к нулю).